MA-2112: PRIMER PARCIAL Tipo A

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Sartenejas Enero-Marzo 2021 TDD

Nombre:____. Carnet:____________________.

1. (12 pts.) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2, & \text{si } \; y + x^2 < 0 \\ \\ x^2y, & \text{si } \; y + x^2 \geq 0 \end{cases}$$

   a) ¿Es f continua en los puntos (1,-1) y (1,0)?

   b) ¿Es f diferenciable en los puntos (1,-1) y (1,0)?

   c) Calcule la derivada direccional de f en el punto (1,1) en la dirección del vector $\vec{\mathbf{v}} = 1/\sqrt{2}(1,-1)$.

2. (10 pts.) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 13$ y $2x - y + z = 4$.

3. (10 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ definida como $z = f(u,w)$. Si se toma $u = x^2y^4$ y $w = \dfrac{1}{x}$, se obtiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2xy^4 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w}$$

   Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y)$.

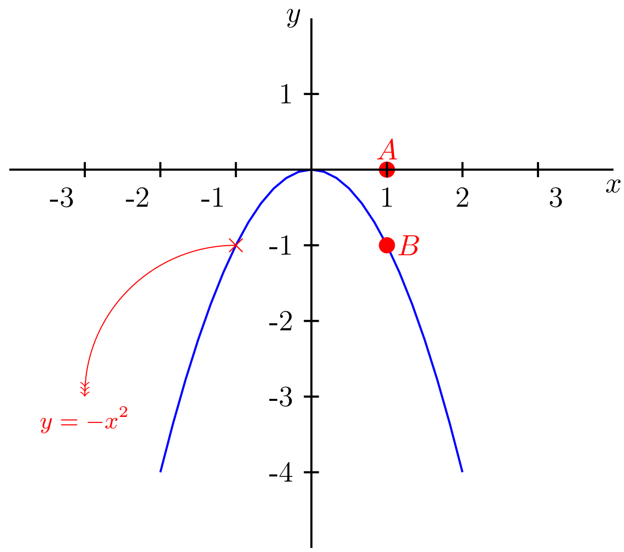
4. (13 pts.) Sea la función $f(x,y) = (1 - x^2)\text{sen}(y)$, halle y clasifique los puntos críticos de f en el rectángulo $[0,2]\times[0,2\pi]$.

SOLUCIÓN

1. Respondemos el inciso a): Para que f sea continua en un punto $\bar{x}$ de su dominio (en este caso $\mathbb{R}^2$), debe cumplirse que

$$\lim_{(x,y)\to\bar{x}} f(x,y) = f(\bar{x})$$

Determinaremos si la condición se cumple para $\bar{x} = A(1,0)$ y $\bar{x} = B(1,-1)$, pero primero bosquejemos el dominio de la función f.



Dado que el punto A pertenece a la región superior a la parábola $y = -x^2$, $f(x,y) = x^2y$, un polinomio que es trivialmente continuo en su dominio, y, por lo tanto, continuo en el punto A. También puede justificarse la continuidad de f en A es denotando que existe un disco abierto $D_r(\bar{x}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 > 0\}$ tal que $A(1,0) \in D_r(\bar{x})$. La manera menos óptima sería demostrar el límite ■.

Determinar la continuidad de B no es tan sencillo porque está ubicado en la frontera $y = -x^2$ donde la función cambia de expresión, entonces debemos *acercarnos* al punto desde ambas regiones que definen a f. Probaremos en ambas regiones el haz de rectas $y + 1 = m(x-1)$, $m \neq 0$, tal que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{x\to 1} f(x, mx - m - 1)$$

- Para $\bar{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 \geq 0\}$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{x\to 1} x^2[mx - (m+1)] = -1$$

- Para $\bar{x} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 < 0\}$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{x\to 1} x[mx - (m+1)]^2 = 1$$

Dado que los límites no son iguales, podemos apelar al teorema de unicidad del límite y asegurar que el límite no existe. Al no existir el límite, la función f no es continua en B ■.

Respondemos el inciso b): Rápidamente, f no es diferenciable en $B(1,-1)$ por teorema porque la función no es continua en tal punto ■.

Como f es continua en A, basta que sus derivadas parciales sean continuas en A para que f sea diferenciable por teorema en tal punto. Calculamos el gradiente de la función f para $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 \geq 0\}$.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy, x^2)$$

Las derivadas parciales son dos polinomios trivialmente continuos en punto A. Entonces, por teorema, f es diferenciable en A $\blacksquare$.

Respondemos el inciso c): Podemos aplicar la definición o el teorema que relaciona el gradiente con la derivada direccional. La diferencia radica en que para utilizar el teorema f debe ser diferenciable en $(1,1)$. En efecto f es diferenciable en $(1,1)$ porque el punto pertenece al disco abierto $D_r(\bar{x}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 > 0\}$ y las parciales son continuas (se aplica el mismo razonamiento usado al analizar el punto B). Apliquemos ambos métodos destacando que el vector $\vec{\mathbf{v}} = 1/\sqrt{2}(1,-1)$ es unitario.

$$D_{\vec{\mathbf{v}}} f(1,1) = \left\langle \vec{\nabla} f(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\rangle = \left\langle (2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

Por definición

$$\begin{aligned} D_{\vec{\mathbf{v}}} f(1,1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((1,1) + t\vec{\mathbf{v}}) - f(1,1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{t}\right] \\ D_{\vec{\mathbf{v}}} f(1,1) &= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

2. Definimos la función $F(x,y,z) \equiv x^2 + xy - z$, tal que su plano tangente Π en el punto $(x,y,z) = (a,b,c)$ tiene por definición la expresión:

$$\Pi : \left\langle \vec{\nabla} F \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Es cuestión de determinar el punto de tangencia y el gradiente de F evaluado en tal punto para tener la expresión de Π. Partimos de la condición del enunciado: el plano debe ser perpendicular a los planos $x+y-z = 13$ y $2x - y + z = 4$. Para que esto suceda, el vector normal de Π debe ser perpendicular al vector normal de cada plano dado. Tomemos el vector $\vec{n}$ perpendicular a los planos.

$$\begin{cases} x + y - z = 13 \to \vec{n}_1 = (1,1,-1) \\ 2x - y + z = 4 \to \vec{n}_2 = (2,-1,1) \end{cases} \implies \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Entonces,

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(\hat{\jmath} + \hat{k})$$

Ahora, el vector normal de Π, $\vec{\nabla} F(a,b,c)$, debe ser colineal a $\vec{n}$.

$$\vec{\nabla} F(a,b,c) = \lambda \vec{n} \iff \begin{pmatrix} 2a + b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Fíjese que el valor de c lo podemos calcular evaluando $(x, y) = (-1, 2)$ en la ecuación de la superficie y obtenemos el punto de tangencia.

$$c = (-1)^2 + (-1)2 \implies (a, b, c) = (-1, 2, -1)$$

Ahora, el gradiente de F evaluado en el punto ya lo calculamos al estudiar la condición de colinealidad. Finalmente podemos determinar la expresión de Π.

$$\Pi : \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies \Pi : y + z = 1 \quad \blacksquare$$

---

3. Dado que f es de clase $\mathcal{C}^2$ es f y sus parciales son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ y podemos aplicar la regla de la cadena. Debemos hacer dos consideraciones: primero, los términos de la parcial dada corresponde al producto de funciones dependientes de x e y, tal que debemos utilizar la regla del producto; segundo, las parciales de f respecto a u y w dependen naturalmente de ambas variables, entonces debemos usar la regla de la cadena reiteradamente.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^4 \frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial w}\right) \\
&= 8xy^3 \frac{\partial f}{\partial u} + 2xy^4 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) \\
&= 8xy^3 \frac{\partial f}{\partial u} + 2xy^4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u}\frac{\partial w}{\partial y}}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y}}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) = 8xy^3 \frac{\partial f}{\partial u} + 8x^3y^4 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4y^3 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} \quad \blacksquare$$

---

4. Primero estudiamos a f dentro del rectángulo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\pi\}$. Determinamos los puntos críticos de f en D.

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} -2x\text{sen}(y) \\ (1 - x^2)\cos(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto deriva en el siguiente sistema de ecuaciones sujeto a dos condiciones:

$$\begin{cases} -2x\text{sen}y = 0 \\ (1 - x^2)\cos y = 0 \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \ \vee \ y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm 1 \ \vee \ y = (k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2\pi \end{cases}$$

El sistema sólo tiene la solución de $(x, y) = (1, \pi)$, ese es el único punto crítico. Procedemos a clasificarlo mediante el criterio del hessiano. Calculamos la matriz hessiana.

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\text{sen}y & -2x\cos y \\ -2x\cos y & -(1 - x^2)\text{sen}y \end{bmatrix}$$

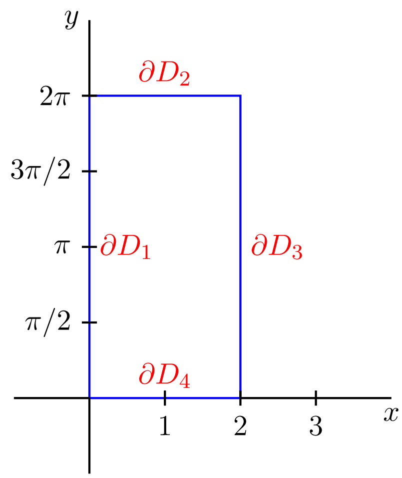
$$\therefore H_f(1, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El hessiano es entonces $\det(H_f(1,\pi)) = -4$ y concluimos que el punto $(x,y) = (1,\pi)$ es un punto de ensilladura.

Ahora estudiamos f en el contorno del rectángulo ∂D que podemos expresar como la unión de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\partial D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 < y < 2\pi\} \\
\partial D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\pi,\ 0 < x < 2\} \\
\partial D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2,\ 0 < y < 2\pi\} \\
\partial D_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 < x < 2\}
\end{aligned}$$

Bosquejamos el rectángulo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\pi\}$.



Estudiamos entonces a f restringida a cada ∂D_i:

- $f|\partial D_1$: Primero determinamos los puntos críticos.

$$\begin{cases} f(x,y) = (1-x^2)\operatorname{sen} y \\ x = 0 \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Longrightarrow f(0,y) = \operatorname{sen} y \\ &\Longrightarrow f'(0,y) = \cos y \\ f'(0,y) = 0 &\iff y = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

  Evaluamos los puntos críticos en la función:

$$\begin{cases} f(0,\pi/2) = 1 \\ f(0,3\pi/2) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \text{Tenemos entonces los puntos} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Incluimos el origen al considerar la situación donde $y = 0$.

- $f|\partial D_2$: Primero determinamos los puntos críticos.

$$\begin{cases} f(x,y) = (1-x^2)\operatorname{sen} y \\ y = 2\pi \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Longrightarrow f(x,2\pi) = 0 \\ &\Longrightarrow \text{No se alcanza máximo ni mínimo alguno} \end{aligned}$$

- $f|\partial D_3$: Primero determinamos los puntos críticos.

$$\begin{cases} f(x,y) = (1-x^2)\operatorname{sen} y \\ x = 2 \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Longrightarrow f(2,y) = -3\operatorname{sen} y \\ &\Longrightarrow f'(2,y) = -3\cos y \\ f'(2,y) = 0 &\iff y = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Evaluamos los puntos críticos en la función:

$$\begin{cases} f(2,\pi/2) = -3 \\ f(2,3\pi/2) = 3 \end{cases} \implies \text{Tenemos entonces los puntos } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3\pi/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Incluimos el origen al considerar la situación donde $y = 0$.

- $f|\partial D_4$: Primero determinamos los puntos críticos.

$$\begin{cases} f(x,y) = (1-x^2)\text{sen}y \\ y = 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \begin{array}{l} \implies f(x,0) = 0 \\ \implies \text{No se alcanza máximo ni mínimo alguno} \end{array}$$

Finalmente, por simple inspección, concluimos que los puntos críticos de f en el rectángulo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$ son:

- $(1,\pi)$, punto de ensilladura $\blacksquare$.
- $(2,3\pi/2)$, máximo absoluto $\blacksquare$.
- $(2,\pi/2)$, mínimo absoluto $\blacksquare$.

Este parcial fue resuelto y digitalizado por Asxel Ramírez para GECOUSB

Asxel Ramirez
18-10322
Lic. Química
Twitter: @asx.0088

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección
gecousb@gmail.com